Title	The Norm of Pre-Shwarzian and Shwarzian Derivatives of Spiral-like Functions (Applications of Complex Function Theory to Differential Equations)
Author(s)	奥山, 裕介
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1062: 69-70
Issue Date	1998-09
URL	http://hdl.handle.net/2433/62405
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1062巻 1998年 69-70

The Norm of Pre-Shwarzian and Shwarzian Derivatives of Spiral-like Functions

奥山裕介 (Yûsuke Okuyama)
Department of Mathematics, Graduate School of Science
Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan
E-mail; okuyama@kusm.kyoto-u.ac.jp

単位円板を$\mathbb{D}$と表す．また$\mathbb{D}$上の正則函数 f で, $f(0)=f\,'(0)-1=0$ と正規化されたもの全体の集合を A と表す．さらに f が$\mathbb{D}$上単葉であるもの全体を S で表す．

定数 $\beta\in(-\pi/2,\pi/2)$ に対し, $f\in A$ が β-*spiral-like*であるとは, $f\in S$ かつ任意の $z\in\mathbb{D}$に対して, 原点と $f(z)$ を繋ぐ対数螺旋 $f(z)\exp(-e^{-i\beta}t)$ $(0\leq t<\infty)$ が $f(\mathbb{D})$ に含まれることと定義する。これは $\Re(zf'(z)/e^{i\beta}f(z))>0$ が任意の $z\in\mathbb{D}$で成り立つことと同値である。

次に, D 上の非定数有理型函数 f に対して, その pre-Schwarz 微分及び Schwarz 微分をそれぞれ

$$T_f=\frac{f''}{f'},\ S_f=(T_f)'-\frac{1}{2}(T_f)^2$$

と定義する．次に, $\mathbb{D}$上局所単葉な函数 f に対し, T_f と S_f のノルムをそれぞれ

$$\|T_f\|_1=\sup_{z\in\mathbb{D}}|T_f(z)|(1-|z|^2),\ \|S_f\|_2=\sup_{z\in\mathbb{D}}|S_f(z)|(1-|z|^2)^2$$

と定義する。これらのノルムは Teichmüller 空間論において重要な意味を持つ。例えば, Astala-Gehring [1], Zhuravlev [2] を見よ．

以下では Spiral-like 函数の pre-Schwarz 微分ならびに Schwarz 微分のノルムについて新しく得られた結果を述べる．

Theorem. $|\beta| < \pi/2$ とする. f が β-spiral-like 函数ならば以下が成り立つ.

(i) $0 \leq |\beta| \leq \pi/3$ の時, $\|T_f\|_1 \leq 2|2+e^{2i\beta}|$. 等号は f が β-spiral Koebe 函数 $f_\beta(z) := z/(1-z)^{-2e^{-i\beta}\cos\beta}$ の時少なくとも成り立つ.

(ii) $\pi/3 < |\beta| < \pi/2$ の時, $\|T_f\|_1 \leq \|T_{f_\beta}\|_1 (\geq 2|2+e^{2i\beta}|)$. 等号は f が β-spiral Koebe 函数の時, その時に限り成り立つ.

Remark. β- 対数螺旋の部分弧 $\Gamma_\beta := \{z = f_\beta(-e^{2i\beta})\exp(e^{i\beta}t); 0 \leq t < \infty\}$ とおくと, $f_\beta(\mathbb{D}) = \mathbb{C}\setminus\Gamma_\beta$. また $\|S_{f_\beta}\|_2 = 6$ である.

参考文献

[1] Astala, K. and Gehring, F. W. Injectivity, the *BMO* norm and the universal Teichmüller space, *J. Analyse Math.*, **46** (1986), 16–57.

[2] Zhuravlev, I. V. A model of the universal Teichmüller space, *Siberian Math. J.*, **27** (1986), 691–697.